

$2BAC\ PC - SVT$

سلسلة التمارين رقم 02

الاشتقاق ودراسة الدوال

الثانوية التأهيلية موسى بن نصير -مراكش

الموسم الدراسي : 2020-2021

الأستاذ : عبد الوهاب الشعراني

التمرين 1

لتكن f الدالة العددية المعرفة بما يلي : $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$

1) أدرس قابلية اشتقاق الدالة f في النقطة $x_0 = 2$.

2) حدد معادلة المماس للمنحنى (C_f) في النقطة التي أفصولها 2.

التمرين 2

لتكن f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة بما يلي :

$$f(x) = x + \sqrt{x^2 - 3x}$$

1) حدد D_f مجموعة تعريف الدالة f .

2) أدرس قابلية إشتقاق الدالة f على اليمين في 3 وأعط تأويلا هندسيا للنتيجة المحصل عليها .

التمرين 3

لتكن f دالة عددية لمتغير حقيقي x معرفة بما يلي :

$$f(x) = x - \sqrt[3]{1 - x}$$

أدرس قابلية اشتقاق الدالة f على اليسار في 1 وأعط تأويلا هندسيا للنتيجة المحصل عليها .

التمرين 4

حدد في كل حالة من الحالات التالية $f'(x)$:

1) $f(x) = 4x^3 + 24x + 5$

2) $f(x) = \frac{x+1}{x^2+x+1}$

3) $f(x) = \sqrt{x}\cos x$

4) $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 4}$

5) $f(x) = (3x^2 + x + 4)^7$

6) $f(x) = \sqrt[3]{x^2 + 2x + 1}$

7) $f(x) = (x^2 + 2x)^{\frac{5}{2}}$

8) $f(x) = \cos(x^2 + 7x + 1)$

9) $f(x) = \left(\frac{x+1}{x^2+3x+7}\right)^3$

10) $f(x) = \sqrt{x^2 + 5x}$

11) $f(x) = \sqrt[4]{1 + \cos^2 x}$

12) $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 2x} + \sqrt[4]{4x + 1}$

13) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-5x}}$

التمرين 5

نعتبر الدالة f المعرفة على $[0; +\infty[$ بما يلي :

$$f(x) = x\sqrt{x^3 + 1}$$

1) أحسب $f'(x)$ ثم استنتج أن f تزايدية قطعا على $[0; +\infty[$.

2) بين أن الدالة f تقبل دالة عكسية f^{-1} .

3) أحسب $f(2)$ ثم استنتج $(f^{-1})'(6)$.

4) أحسب $f(0)$ ثم استنتج $(f^{-1})'(0)$.

التمرين 6

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي :

$$f(x) = x^3 - 3x - 3$$

1) أدرس تغيرات الدالة f .

2) ليكن g قصور الدالة f على المجال $]1; +\infty[$.

أ- بين أن g تقبل دالة عكسية g^{-1} معرفة على مجال J يتم تحديده

ب- بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α ، وأن $2 < \alpha < 3$.

ج- حدد مجال قابلية اشتقاق g^{-1} .

د- بين أن $(g^{-1})'(0) = \frac{1}{3(\alpha^2-1)}$.

التمرين 7

لتكن f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة بما يلي :

$$f(x) = x\sqrt[3]{x - 2}$$

1) حدد D_f ثم $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

2) أدرس قابلية اشتقاق الدالة f على اليمين في 2 وأعط تأويلا هندسيا للنتيجة المحصل عليها .

3) أ- بين أن

$$\forall x \in]2; +\infty[:\ \ f'(x) = \frac{4x - 6}{3\sqrt[3]{(x-2)^2}}$$

ب- أعط جدول تغيرات الدالة f .

4) أ- بين أن f تقبل دالة عكسية f^{-1} معرفة على مجال J يتم تحديده .

ب- بين أن f^{-1} قابلة للاشتقاق في العدد 3 ثم أحسب $(f^{-1})'(3)$

التمرين 8

لتكن f الدالة العددية المعرفة على $]-2; -1[\cup]-1; +\infty[$ بما يلي : $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x+2}-1}$. وليكن (C_f) منحناها في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1) أحسب النهايات :

$$\lim_{\substack{x\to-1\\x<-1}} f(x) \text{ و } \lim_{\substack{x\to-1\\x>-1}} f(x) \text{ و } \lim_{x\to+\infty} f(x)$$

2) أحسب : $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ ثم أول النتيجة هندسيا .

3) أ- أدرس قابلية اشتقاق الدالة f على اليمين في -2 .

ب- بين أن لكل x من $]-2; -1[\cup]-1; +\infty[$:

$$f'(x) = \frac{\left(\sqrt{x+2} - 1\right)^2 + 1}{2\sqrt{x+2}\left(\sqrt{x+2} - 1\right)^2}$$

ج- أعط جدول تغيرات الدالة f .

4) ليكن g قصور الدالة f على المجال $I =]-1; 2]$.

بين أن g تقبل دالة عكسية g^{-1} معرفة على مجال J يتم تحديده .

5) أ- أنشئ المنحنى (C_f) (دراسة التقعر غير مطلوبة)

ب- أنشئ المنحنى $(C_{g^{-1}})$ في نفس المعلم السابق .

التمرين 9

لتكن f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة بما يلي :

$$f(x) = x - \sqrt{2x - 1}$$

وليكن (C_f) منحناها في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1) حدد D_f ثم $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

2) أدرس الفرع اللانهائي للمنحنى (C_f) .

3) أ- أدرس قابلية إشتقاق الدالة f على اليمين في النقطة $\frac{1}{2}$.
ب- بين أن إشارة $f'(x)$ على المجال $\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$ هي إشارة $x-1$.
ج- أعط جدول تغيرات الدالة f .
د- أعط معادلة ديكارتية للمماس (T) للمنحنى (C_f) في النقطة ذات الأفصول 5 .
4) أنشئ المنحنى (C_f) .
5) لتكن g الدالة العددية المعرفة من $[1;+\infty[$ نحو $[0;+\infty[$ بما يلي : $g(x)=f(x)$.
أ- بين أن g تقبل دالة عكسية .
ب- تحقق من أن $(\forall x\epsilon[1;+\infty[):\quad g(x)=\frac{(\sqrt{2x-1}-1)^2}{2}$
ج- أحسب $g^{-1}(x)$ لكل x من $[0;+\infty[$.
د- أنشئ $(C_{g^{-1}})$ في نفس المعلم السابق .

التمرين 10

لتكن f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة بما يلي :

$$(\forall x\in\mathbb{R}):f(x)=\frac{x}{2}\left(x+\sqrt{x^2+4}\right)$$

وليكن (C_f) منحناها في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$.
1) احسب $\lim_{x\to+\infty}f(x)$ و $\lim_{x\to-\infty}f(x)$.
2) أ- بين أن :

$$(\forall x\in\mathbb{R}):\ f'(x)=\frac{\left(x+\sqrt{x^2+4}\right)^2}{2\sqrt{x^2+4}}$$

ب- استنتج تغيرات الدالة f .
3) أ- أدرس الفروع اللانهائي للمنحنى (C_f) .
ب- أعط معادلة ديكارتية للمماس (T) للمنحنى (C_f) في النقطة ذات الأفصول 0.
ج- أنشئ المنحنى (C_f) .
4) أ- بين أن f تقبل دالة عكسية f^{-1} معرفة على مجال J يتم تحديده .
ب- بين أن لكل x من J :

$$f^{-1}(x)=\frac{x}{\sqrt{x+1}}$$

ج- أحسب $(f^{-1})'(0)$.
د- أنشئ $(C_{f^{-1}})$ في نفس المعلم السابق .

التمرين 11

لتكن f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة بما يلي :

$$f(x)=-1+\sqrt[3]{1-x}$$

وليكن (C_f) منحناها في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$.
1) أ- حدد D_f مجموعة تعريف الدالة f .
ب- أحسب $\lim_{x\to-\infty}f(x)$.
ج- أدرس قابلية إشتقاق الدالة f على اليسار في 1 وأعط تأويلا هندسيا للنتيجة .
2) أدرس تغيرات الدالة f .
3) أدرس الفرع اللانهائي للمنحنى (C_f) .
4) حدد $f(0)$ و $f'(0)$ ثم أنشئ المنحنى (C_f) .
5) أ- بين أن f تقبل دالة عكسية f^{-1} معرفة على مجال J يتم تحديده .
ب- حدد $f^{-1}(x)$ لكل x من J .
ج- أنشئ $(C_{f^{-1}})$ في نفس المعلم السابق .

التمرين 12

لتكن f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة بما يلي :

$$f(x)=x+1-\sqrt{x^2-2x}$$

وليكن (C_f) منحناها في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$.
1) أ- حدد D_f مجموعة تعريف الدالة f .
ب- أحسب نهايات الدالة f عند محدات D_f .
2) أ- أدرس قابلية إشتقاق الدالة f على اليمين في 2 وأعط تأويلا هندسيا للنتيجة المحصل عليها .
ب- أحسب $f'(x)$ وادرس إشارتها .
3) بين أن (C_f) يقبل مقاربا مائلا محددا معادلته ثم حدد وضعه النسبي مع المنحنى (C_f) .
4) ليكن g قصور الدالة f على المجال $[2;+\infty[$.
أ- بين أن g تقبل دالة عكسية g^{-1} معرفة على مجال J يتم تحديده .
ب- أنشئ $(C_{g^{-1}})$ في نفس المعلم السابق .

التمرين 13

لتكن f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة بما يلي :

$$f(x)=\sqrt{x^2-|x|+1}$$

وليكن (C_f) منحناها في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$.
1) بين أن $D_f=\mathbb{R}$.
2) أدرس زوجية الدالة f .
3) أ- حدد $\lim_{x\to+\infty}f(x)$.
ب- أدرس الفرع اللانهائي للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$.
4) أ- أدرس قابلية إشتقاق الدالة f على اليمين في 0 .
ب- أدرس تغيرات الدالة f .
5) أنشئ المنحنى (C_f) .
6) ليكن g قصور الدالة f على المجال $\left[\frac{1}{2};+\infty\right[$.
أ- بين أن g تقبل دالة عكسية g^{-1} معرفة على مجال J يتم تحديده .
ب- أنشئ $(C_{g^{-1}})$ في نفس المعلم السابق .

التمرين 14

لتكن f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة بما يلي :

$$f(x)=x\left(\sqrt{x}-2\right)^2$$

وليكن (C_f) منحناها في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$.
1) أحسب $\lim_{x\to+\infty}f(x)$.
2) أدرس قابلية إشتقاق الدالة f على اليمين في 0 وأعط تأويلا هندسيا للنتيجة المحصل عليها .
3) أ- بين أنه لكل $x>0$ لدينا : $f'(x)=2(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-2)$
ب- أدرس إشارة $f'(x)$ و أعط جدول تغيرات الدالة f .
4) أدرس الفرع اللانهائي للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$.
5) أنشئ المنحنى (C_f) .
6) ليكن g قصور الدالة f على المجال $[4;+\infty[$.
أ- بين أن g تقبل دالة عكسية g^{-1} معرفة على مجال J يتم تحديده .
ب- حسب $g^{-1}(x)$ لكل x من J .
ج- أنشئ $(C_{g^{-1}})$ في نفس المعلم السابق